

1. Questions à Choix Multiples et Réponses Courtes (40 points)

Cochez la bonne réponse. Une seule réponse est correcte par question.

- (1) **Transversalité.** Deux sous-variétés K_1 et K_2 de $V \subset \mathbb{R}^n$ s'intersectent transversalement en p si :
- ☐ $T_p K_1 \cap T_p K_2 = \{0\}$.
 - ☐ $T_p K_1 \perp T_p K_2$ (ils sont orthogonaux).
 - ☐ $T_p K_1 + T_p K_2 = T_p V$.
 - ☐ $\dim(K_1) + \dim(K_2) = \dim(V)$.
- (2) **Définition de la dérivée.** Soit $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction lisse. La dérivée dF_q est intrinsèquement :
- ☐ Un vecteur de $\mathbb{R}^m$.
 - ☐ Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$.
 - ☐ Une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ vers $\mathbb{R}^n$.
 - ☐ Un nombre réel représentant la pente.
- (3) **Immersion.** Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion, alors :
- ☐ $f^{-1}(\mathbb{R})$ est non-vide.
 - ☐ $f^{-1}(\mathbb{R})$ est un ensemble non-compact.
 - ☐ $f^{-1}(\mathbb{R})$ est une variété.
 - ☐ aucune de ces réponses n'est vraie pour toutes les immersions.
- (4) **Dimension de l'intersection transversale.** Si deux variétés V et W de dimension 3 s'intersectent transversalement dans $\mathbb{R}^5$, quelle est la dimension de leur intersection (si elle est non vide) ?
- ☐ 0 (des points isolés).
 - ☐ 1 (des courbes).
 - ☐ 2 (des surfaces).
 - ☐ L'intersection transversale est impossible dans ce cas.
- (5) **Classification des germes.** Soit $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, 0)$ un germe d'une fonction lisse à l'origine 0. Si $f'(0) \neq 0$ alors il existe $\varphi \in G_2$ (le groupe des germes de difféomorphismes) tel que :
- ☐ $f \circ \varphi = f(0) - x^2$.
 - ☐ $f \circ \varphi = f(0) + x^2$.
 - ☐ $f \circ \varphi = f(0) - x + x^2$.
 - ☐ Aucune de ces réponses sont toujours vraies.

- (6) Qu'est-ce qu'un **difféomorphisme** entre deux sous-ensembles d'espaces euclidiens V_1 et V_2 ? Donnez la définition précise.
- (7) Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse sur une variété V . Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $p \in V$ soit considéré comme un **point critique** de f ?
- (8) Comment définit-on une carte coordonnée d'une variété V centrée à un point p ?

2. Résolution de problèmes (60 points)

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos étapes.

2.1. Déterminez l'ensemble ouvert U maximale sur lequel l'application :

$$F(\theta, \phi) = (\cos \theta \sin \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \phi)$$

de $\mathbb{R}^2$ à S^2 est une submersion.

2.2. Soit $M = S^1$ le cercle unité dans le plan $\mathbb{R}^2$, défini par $x^2 + y^2 = 1$. Soit N_ϵ la droite verticale définie par $x = 1 + \epsilon$, où $\epsilon \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Déterminez pour quels valeurs de ϵ l'intersection de N_ϵ et M n'est pas transverse. Justifiez votre réponse.

2.3. On considère les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 + x^3.$$

On souhaite déterminer si f et g définissent le même germe en 0 à équivalence près (autrement dit, s'il existe un germe de difféomorphisme $\phi : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tel que $g = f \circ \phi$).

- (1) Montrer que l'on peut écrire $g(x) = x^2 h(x)$ où h est une fonction lisse au voisinage de 0 telle que $h(0) > 0$.
- (2) Construire explicitement un changement de coordonnées local $\phi(x)$ de la forme $x \cdot k(x)$ qui transforme g en f .

2.4. **Bonus.** On considère $\Gamma = \{(x, y) : y^2 = x^3\}$. Trouvez un système de coordonnées pour Γ en voisinage de l'origine, ou démontrer que Γ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ en 0.