

1. Questions à Choix Multiples et Réponses Courtes (40 points)

Cochez la bonne réponse. Une seule réponse est correcte par question.

- (1) **Crochet de Lie.** Soient $X = \frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x \frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$. Le crochet $[X, Y]$ est égal à :

- ☒ $\frac{\partial}{\partial y}$.
☐ $x \frac{\partial}{\partial x}$.
☐ 0.
☐ $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$.

On se souvient que le crochet de Lie $[X, Y]$ est le champ vectoriel unique satisfaisant :

$$L_{[X, Y]}f = L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f),$$

pour toute fonction f , où $L_Z f = df(Z)$.

- (2) **Germes.** Deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ définissent le même germe en 0 si :

- ☐ $f(0) = g(0)$ et $df_0 = dg_0$.
☒ Il existe un ouvert U contenant 0 tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in U$.
☐ $f(x) - g(x) = o(x^k)$ quand $x \rightarrow 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
☐ Elles ont les mêmes séries de Taylor en 0.

- (3) **Champs de vecteurs sur le paraboloïde.** Lequel des champs suivants est un champ de vecteurs tangent bien défini sur le paraboloïde $z = x^2 + y^2$ dans $\mathbb{R}^3$?

- ☒ $X = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + 2(x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial z}$.
☐ $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$.
☐ $X = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$.
☐ $X = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$.

- (4) **Dimension de l'intersection.** Si deux sous-variétés V et W de $\mathbb{R}^n$ de dimensions respectives k et l s'intersectent transversalement, quelle est la dimension de leur intersection (si non vide) ?

- ☐ $k + l$.
☐ $\min(k, l)$.
☒ $k + l - n$.
☐ $n - (k + l)$.

- (5) **Classification des germes.** Soit $f \in \mathfrak{R}(\mathbb{R}, 0)$ un germe d'une fonction lisse à l'origine 0. Si $f''(0) > 0$ alors il existe $\varphi \in G_2$ (le groupe des germes de difféomorphismes) tel que :

- ☐ $f \circ \varphi = f(0) + x$.
☐ $f \circ \varphi = f(0) + x^2$.
☐ $f \circ \varphi = f(0) + x + x^2$.
☒ Aucune de ces réponses sont toujours vraies.

- (6) Au voisinage d'un point p où un champ de vecteurs X ne s'annule pas ($X(p) \neq 0$), le champ est localement difféomorphe à quel modèle locale ?

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

- (7) Soit V une variété et $\mathcal{O} = \{U_\alpha\}$ un recouvrement de V par des ensembles ouverts. Expliquez brièvement ce qu'est une partition de l'unité subordonnée à $\mathcal{O}$.

une collection de fonctions lisses $f_1, f_2, \dots$ telle que :

- $f_i : V \rightarrow [0, 1]$.
- *pour tout $x \in V$ il existe un ouvert U telle que $f_i|_U = 0$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ sauf un nombre fini de i .*
- f_i a un support compact contenu dedans U_α pour un α ,
- $1 = f_1 + f_2 + \dots$

- (8) Comment définit-on l'espace tangent TV_p à une variété V en un point p ?

Choisir une carte coordonnée (U, x) centrée a p . Soit $\phi : x(U) \rightarrow U$ le paramétrisation inverse. On définit :

$$TV_p = \text{im}(\text{d}\phi_{x(p)})$$

2. Résolution de problèmes (60 points)

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos étapes.

2.1. Soit $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)$ l'ensemble des germes de champs vectoriels sur $\mathbb{R}$, à l'origine, et soit G_1 le groupe des germes de difféomorphismes. On souvient que G_1 agit sur $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)$ par $\varphi_* X = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$.

- Démontrez que $x \frac{\partial}{\partial x}$ et $-x \frac{\partial}{\partial x}$ sont dans des orbites différentes dans l'ensemble des orbites $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)/G_1$.
- Démontrez que $x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ et $-x^2 \frac{\partial}{\partial x}$ sont dans la même orbite dans l'ensemble des orbites $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)/G_1$.

Soit $X = f(x) \frac{\partial}{\partial x}$ où $f(x)$ est une fonction scalaire. Alors :

$$\varphi_* X = f(\varphi^{-1}(x)) \varphi'(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Alors le problème demande s'il existe $\varphi \in G_1$ telle que :

$$\varphi^{-1}(x) \varphi'(x) = -x,$$

mais cela est impossible, car :

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{x=0} (\varphi^{-1}(x) \varphi'(x)) = \frac{1}{\varphi'(0)} \varphi'(0) = 1 \neq -1.$$

On utilise $\varphi(0) = \varphi^{-1}(0) = 0$, car $\varphi \in G_1$.

Pour la deuxième partie, on doit trouver φ telle que :

$$\varphi^{-1}(x)^2 \varphi'(x) = -x^2.$$

On prend $\varphi(x) = -x$, avec $\varphi^{-1}(x) = -x$ et $\varphi'(x) = -1$.

2.2. Soit $\mathfrak{L} : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire :

$$\mathfrak{L}(af + bg) = a\mathfrak{L}(f) + b\mathfrak{L}(g),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, et qui satisfait la règle de Leibniz à un point p :

$$\mathfrak{L}(fg) = \mathfrak{L}(f)g(p) + f(p)\mathfrak{L}(g).$$

Démontrez qu'il existe un vecteur $X \in TV_p$ tel que :

$$\mathfrak{L}(f) = df_p(X).$$

Sans perdre de la généralité, on suppose que $V = \mathbb{R}^n$ et $p = 0$. Soit $X = \sum \mathfrak{L}(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Alors

$$L_X(x_i) = \mathfrak{L}(x_i).$$

De plus, $\mathfrak{L}(1) = 2\mathfrak{L}(1)$ alors $\mathfrak{L}(c) = L_X(c) = 0$ pour n'importe quel constante c . Alors, si $f = c + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, il se tient que $L_X(f) = \mathfrak{L}_X(f)$ par linéarité.

Par le théorème de Taylor, on peut décomposé n'importe quel fonction f comme :

$$f = c + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum x_i x_j g_{ij}(x)$$

où les fonctions g_{ij} sont lisse. Alors :

$$\mathfrak{L}(f) = \mathfrak{L}(c + \sum a_i x_i) + \mathfrak{L}(\sum x_i x_j g_{ij}(x)) = L_X(f) + \sum \mathfrak{L}(x_i x_j g_{ij}(x)) = L_X(f) + 0 = L_X(f),$$

car :

$$\mathfrak{L}(x_i x_j g_{ij}(x)) = x_i(0) \mathfrak{L}(x_j g_{ij}) + \mathfrak{L}(x_i) x_j(0) g_{ij}(0) = 0 + 0.$$

2.3. Soit $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

(1) Calculer la dérivée dF_p en un point $p = (x, y, z)$.

(2) Déterminer l'ensemble des points critiques de F .

(3) Soit $V = F^{-1}(1)$. Démontrez que (x, z) forme un système de coordonnées sur un voisinage $U \subset V$ de $p = (1, 1, 1)$. Expliquez pourquoi (x, z) sont lisse (dans un phrase); et donnez le formule pour le paramétrisation inverse ϕ .

$$(1) dF_p = [2x \ 2y \ -2z].$$

$$(2) dF_p = 0 \iff x = y = z = 0 \iff p = 0.$$

(3) (x, z) sont des coordonnées sur un voisinage de $p = (1, 1, 1)$ car il existe un paramétrisation inverse déterminé par :

$$y = \sqrt{1 + z^2 - x^2}$$

qui est bien défini et lisse sur un voisinage de $(1, 1)$. La fonction (x, z) est lisse car il existe une fonction lisse (en fait, linéaire) sur $\mathbb{R}^3$. La formule :

$$\phi(x, z) = (x, \sqrt{1 + z^2 - x^2}, z)$$

est la paramétrisation inverse.

2.4. **Bonus.** Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une variété **compacte** de dimension 2. Démontrez que, pour n'importe quel vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, il existe au moins un point p pour lequel $T\Sigma_p$ est orthogonal à v .

La fonction $f(x) = \langle v, x \rangle$ atteint un maximum à un point $x_0 \in \Sigma$ par compacité. Alors $T\Sigma_{x_0} \subset \ker df_{x_0}$. Mais :

$$df_{x_0}(w) = \langle v, w \rangle,$$

alors $w \in T\Sigma_{x_0} \implies df_{x_0}(w) = 0 \implies \langle v, w \rangle = 0$, comme désiré.