

1. Questions à Choix Multiples et Réponses Courtes (60 points)

Cochez la bonne réponse. Une seule réponse est correcte par question.

- (1) Soit M le ruban de Möbius :

$$M = ([0, 1] \times [-1, 1]) / ((0, y) \sim (1, -y)),$$

et soit $S \subset M$ le cercle $([0, 1] \times \{0\}) / ((0, 0) \sim (1, 0))$. Quelle est la dimension de $\mathcal{N}_0(M - S)$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ Aucune de ces réponses.

- (2) E1 : Il existe une surjection propre et lisse $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de degré pair.

E2 : Il existe une submersion $F : S^2 \rightarrow S^1$.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
- ☐ E1 : vrai, E2 : faux.
- ☐ E1 : faux, E2 : vrai.
- ☐ E1 : faux, E2 : faux.

- (3) E1 : Le complémentaire d'une variété $P \subset \mathbb{R}^2$ de dimension zéro est connexe par arcs.

E2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application lisse. Le complémentaire des valeurs critiques $f(C)$ est connexe par arcs.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
- ☐ E1 : vrai, E2 : faux.
- ☐ E1 : faux, E2 : vrai.
- ☐ E1 : faux, E2 : faux.

- (4) Soient γ_1, γ_2 deux lacets transverses dans une variété V de dimension 2, et soit $f : P \rightarrow V$ le produit fibré, avec son application induite.

E1 : P est une variété de dimension zéro.

E2 : Si $[\gamma_1] = 0$ dans $\mathcal{N}_1(V)$, alors $[f] = 0$ dans $\mathcal{N}_d(V)$, où $d = \dim P$.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
- ☐ E1 : vrai, E2 : faux.
- ☐ E1 : faux, E2 : vrai.
- ☐ E1 : faux, E2 : faux.

- (5) On considère les germes de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ à l'origine 0, à difféomorphisme près.

E1 : Les germes de $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ et de $-x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ sont équivalents à difféomorphisme près.

E2 : Les germes de $y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}$ et de $x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ sont équivalents à difféomorphisme près.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
- ☐ E1 : vrai, E2 : faux.
- ☐ E1 : faux, E2 : vrai.
- ☐ E1 : faux, E2 : faux.

(6) Soit V une variété lisse. Donnez la définition précise des objets et des morphismes dans le groupoïde $\Pi_1(V)$.

(7) Soit $f : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x) = x/|x|$. Quelle est la matrice dérivée de f au point $p = (0, 0, 1)$?

(8) Quel est le générateur X du flot $\varphi_s(x) = e^{-3s}x$, où $\varphi_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Exprimez votre réponse sous la forme

$$X_s = f_s \frac{\partial}{\partial x},$$

où f_s est une fonction scalaire.

(9) Expliquez la notation $\Gamma(T^*M)$ et pourquoi $df \in \Gamma(T^*M)$ pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

(10) Si $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, expliquez pourquoi :

$$X \in \Gamma(TM) \mapsto g(X, -) \in \Gamma(T^*M)$$

est bien défini et est une application linéaire.

2. Résolution de problèmes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos étapes.

2.1. Construisez une application propre $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de degré impair dont l'ensemble des valeurs critiques est constitué des deux points :

$$f(C) = \{-1, 1\},$$

ou démontrez que ce n'est pas possible.

2.2. Soient Σ_1, Σ_2 des hypersurfaces¹ transverses et compactes dans V .

- (1) Déterminez la dimension de $P = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ en fonction de $\dim V$.
- (2) Expliquez pourquoi l'inclusion $i : P \rightarrow \Sigma_2$ satisfait $[(P, i)] = 0$ dans $\mathcal{N}_d(\Sigma_2)$, où $d = \dim P$, ou fournissez un contre-exemple.

2.3. **Bonus.** (5 points)

Expliquez pourquoi la définition du degré d'une application $f : V \rightarrow W$ entre variétés de même dimension nécessite l'hypothèse que f soit propre.

1. Une hypersurface $\Sigma \subset V$ est une sous-variété de codimension un.