

1. Problèmes Additionnelles

1.1. Soit $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)$ l'ensemble des germes de champs vectoriels sur $\mathbb{R}$, à l'origine, et soit G_1 le groupe des germes de difféomorphismes. On souvient que G_1 agit sur $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)$ par $\varphi_* X = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$.

- Démontrez que $\frac{\partial}{\partial x}$ et $-2\frac{\partial}{\partial x}$ sont dans la même orbite dans l'ensemble des orbites $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)/G_1$.
- Démontrez que $x\frac{\partial}{\partial x}$ et $2x\frac{\partial}{\partial x}$ sont dans des orbites différentes dans l'ensemble des orbites $\mathfrak{X}(\mathbb{R}, 0)/G_1$.

1.2. Soit $\mathfrak{M} : C^\infty(V, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire :

$$\mathfrak{M}(af + bg) = a\mathfrak{M}(f) + b\mathfrak{M}(g),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, et qui satisfait la règle :

$$\mathfrak{M}(fg) = e\mathfrak{M}(f)g(p),$$

pour un point $p \in V$. Démontrez que $\mathfrak{M} = 0$. Ici $e = 2.7182818\dots$

1.3. Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la sphère unité. Considérons le pôle sud $S = (0, 0, -1)$. On définit la projection stéréographique $\pi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (identifié au plan $z = 0$) en associant à un point $p \in S^2$ l'intersection de la droite passant par S et p avec le plan $z = 0$.

(1) Montrer géométriquement ou algébriquement que la formule de la projection est donnée par :

$$\pi_S(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

(2) Calculer l'application inverse $\pi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{S\}$.

1.4. Soit $GL(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ l'ensemble des matrices inversibles. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$. Considérons l'application d'inversion $\iota : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ définie par $\iota(A) = A^{-1}$.

On souhaite redémontrer la formule de la dérivée de ι .

(1) Soit $M : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ l'application de multiplication matricielle $M(A, B) = AB$. Montrer (ou rappeler) que la dérivée de M en (A, B) appliquée au vecteur $(H, K) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$ est :

$$dM_{(A, B)}(H, K) = AH + KB.$$

(2) On sait que $A \cdot \iota(A) = I$ (la matrice identité) pour tout A . En dérivant cette expression par rapport à A dans la direction d'une matrice H , et en utilisant la règle de la chaîne, montrer que :

$$A \cdot d\iota_A(H) + H \cdot \iota(A) = 0.$$

(3) En déduire l'expression explicite de $d\iota_A(H)$.

1.5. On considère $\Gamma = \{(x, y) : y^2 = x^3 + x\}$. Trouvez un système de coordonnées pour Γ en voisinage de l'origine, ou démontrer que Γ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$ en 0.

1.6. Une isotopie (ou flot dépendant du temps) est une famille lisse de difféomorphismes $\Phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\Phi_0 = \text{id}$. Le générateur est la famille de champs de vecteurs X_t définie par l'équation d'évolution $\frac{d}{dt}\Phi_t(p) = X_t(\Phi_t(p))$.

- (1) Soit $\Phi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une l'isotopie qui satisfait $\Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s$. Démontrez que, dans ce cas, le générateur X_t de Φ_t est indépendant de la variable t , c'est-à-dire $X_t = X_0$.
- (2) Soit $\Phi_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par une rotation couplée à une dilatation :

$$\Phi_t(x, y) = (e^t x \cos t - e^t y \sin t, e^t x \sin t + e^t y \cos t).$$

Déterminer le champ de vecteurs X_t associé à ce flot (le générateur).

1.7. Soit G_k l'ensemble des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^k$ basé à l'origine.

On rappelle que $[(\varphi, U)]$ désigne la classe d'équivalence (le germe) d'une application lisse $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, où U est un voisinage de 0, satisfaisant :

- $\varphi(0) = 0$,
- $\det d\varphi_0 \neq 0$.

On dit que $(\varphi_1, U_1) \sim (\varphi_2, U_2)$ s'il existe un voisinage ouvert $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ de 0 tel que $\varphi_1|_{U_3} = \varphi_2|_{U_3}$. On définit l'opération de groupe par la composition : $[(\varphi_1, U_1)] \cdot [(\varphi_2, U_2)] := [(\varphi_1 \circ \varphi_2, U_2 \cap \varphi_2^{-1}(U_1))]$.

- (1) Quel est l'élément neutre e de ce groupe ?
- (2) Pourquoi l'existence d'un inverse est-elle garantie pour tout élément de G_k ?
- (3) Quel est l'inverse de $[(\varphi, \mathbb{R}^k)]$ où $\varphi(x)$ est l'application :

$$\varphi(x) = (x_1 + x_1 x_2, x_2)$$

1.8. Soit G_k l'ensemble des germes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^k$ basé à l'origine. On dit que $g \in G_k$ est **linéaire** si $g = [(\varphi, \mathbb{R}^k)]$ où $\varphi(x) = Ax$ pour une matrice A telle que $\det A \neq 0$.

Construisez un germe $g \in G_k$ qui n'est pas linéaire.