

1. Questions à Choix Multiples et Réponses Courtes (60 points)

Cochez la bonne réponse. Une seule réponse est correcte par question.

- (1) Soit $f(z, w) = z + w$, $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, et soit $V = f^{-1}(0)$. Quelle est la dimension de $\mathcal{N}_1(V)$ en tant qu'espace vectoriel sur le corps $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?

- ☐ 0
☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ Aucune de ces réponses.

- (2) E1 : Il existe une surjection propre et lisse $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de degré pair.
 E2 : Il existe une submersion $F : T^2 \rightarrow S^2$.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
☐ E1 : vrai, E2 : faux.
☐ E1 : faux, E2 : vrai.
☐ E1 : faux, E2 : faux.

- (3) E1 : Chaque immersion $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est homotope à une immersion injective $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 E2 : Si $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est transverse à une hypersurface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ compacte, alors le cardinal du produit fibré $\gamma^{-1}(S^2)$ est nécessairement pair.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
☐ E1 : vrai, E2 : faux.
☐ E1 : faux, E2 : vrai.
☐ E1 : faux, E2 : faux.

- (4) Soient γ_1, γ_2 deux lacets transverses dans une variété V de dimension 3.
 E1 : γ_1 et γ_2 sont disjoints en générale.
 E2 : γ_1 et γ_2 représentent des éléments nuls dans $\mathcal{N}_1(V)$.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
☐ E1 : vrai, E2 : faux.
☐ E1 : faux, E2 : vrai.
☐ E1 : faux, E2 : faux.

- (5) On considère les germes de fonctions scalaires $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ à l'origine 0, à difféomorphisme près.
 E1 : Les germes de $f(x, y) = x^2 - y^2$ et de $g(x, y) = xy + x^2$ sont équivalents à difféomorphisme près.
 E2 : Les germes de $f(x, y) = x^2 - y^2$ et de $g(x, y) = (x - y)^2$ sont équivalents à difféomorphisme près.

- ☐ E1 : vrai, E2 : vrai.
☐ E1 : vrai, E2 : faux.
☐ E1 : faux, E2 : vrai.
☐ E1 : faux, E2 : faux.

(6) Soit V une variété compacte. Donnez la définition précise de l'opération d'addition sur le groupe $\mathcal{N}(V)$.

(7) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x, y, z) = (yz, xz, yx)$. Quelle est la matrice dérivée de f ?

(8) Quelle est la génératrice X du flot $\varphi_s(z) = e^{is}z$, où $z, i \in \mathbb{C}$? Exprimez votre réponse en coordonnées réelles $z = x + iy$:

$$X = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y}.$$

où f, g sont des fonctions scalaires.

(9) (*) Construisez une partition de l'unité f_1, f_2, f_3 sur la sphère $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ subordonnée au recouvrement par les demi-espaces :

$$U_q = \{z : \langle z, q \rangle > 0\}$$

où $q \in S^1$.

(10) Pour quelles valeurs de c le champ vectoriel $X = (x^2 + cx + 4) \frac{\partial}{\partial x}$ a-t-il des zéros non-dégénérés ?

2. Résolution de problèmes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos étapes.

- 2.1. Construisez une application propre $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de degré pair où l'ensemble des valeurs critiques est la courbe :
- $$f(C) = \{(\cos(z), \sin(z), z) : z \in \mathbb{R}\},$$
- ou démontrez que ce n'est pas possible.

- 2.2. Soient X, Y des champs vectoriels avec des zéros non-dégénérés sur une variété compacte M sans bord.

- (1) Montrez que $\Gamma_X = \{(q, X(q)) : q \in M\} \subset TM$ est une sous-variété transverse à la section nulle Γ_0 .
- (2) Montrez que $\#(\Gamma_X \cap \Gamma_0) = \#(\Gamma_Y \cap \Gamma_0)$ modulo deux, ou fournissez un contre-exemple.

- 2.3. **Bonus.** (5 points)

Soit $f : M \rightarrow B$ une submersion propre entre variétés de même dimension, et supposez que M est connexe par arcs. Prouvez que $\Pi_1(B)$ n'est pas indiscret.